

Varianta 55

SUBIECTUL I

- a) $AB = 10$.
- b) Punctul C este mijlocul (AB) $\Rightarrow C(-2, -1)$.
- c) Efectuând calculele obținem $E = 2$.
- d) $\cos x = -\frac{4}{5}$.
- e) $S = 24$.
- f) $\bar{z} = 4$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $A(0, 5) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 5(A)$.
- b) $C_{11}^3 - C_{11}^8 = 0$.
- c) $x = \pm 2$.
- d) $x = 3$.
- e) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.

- a) $f'(x) = 2x$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.
- c) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$.
- e) $\int_1^2 3x^2 dx = 7$.

SUBIECTUL III

- a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- b) $I_2 = A(0) \in G \Rightarrow I_2 \in G$.
- c) $\det(A(x)) = 1$.
- d) Folosind a) avem că $A(x) \cdot A(-x) = A(0) = I_2$.
- e) Folosind a), b), d) se verifică axiomele grupului.

f) Notăm $P(n): (A(1))^n = A(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): A(1) = A(1), (A).$$

Presupunem $P(k) (A)$ și demonstrăm $P(k+1) (A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k): (A(1))^k = A(k), \text{ iar } P(k+1): (A(1))^{k+1} = A((k+1)).$$

$$\text{Dar } (A(1))^{k+1} = (A(1))^k \cdot A(1) \stackrel{P(k)}{=} A(k) \cdot A(1) \stackrel{a)}{=} A((k+1)).$$

De unde $P(n)$ este $(A) \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(27) \stackrel{f)}{=} A(1)(A(1))^2 \cdot \dots \cdot (A(1))^{27} = (A(1))^{1+2+\dots+27} = A(378)$,
de unde $t = 378$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

c) Deoarece $f'(x) < 0, \forall x > 1 \Rightarrow$ funcția f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

d) $-1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \\ \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases} \text{ Relații care sunt adevărate } \forall x \in \mathbf{R}.$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$

g) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1.$